

Dans cette séance on va voir

- (i) plusieurs exemples de calculs du déterminant, avec des méthodes différentes;
- (ii) une propriété importante sur le déterminant du produit de matrices:
 $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$;
- (iii) lien entre déterminant et inversibilité;

Exemple 9.11*

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & -8 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \leftarrow (\text{OEC.I})$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \leftarrow (\text{OEC.II})$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ -18 & 4 & -7 & 3 \\ 11 & -2 & 2 & 5 \\ 10 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \leftarrow (\text{OEC.III})$$

comme
 $\det(A)$
 $\det(A^T)$
on peut
faire aussi
des
OEL !

$\begin{matrix} L_1 & L_3 \\ \hline & \end{matrix} \rightarrow L_1 + 3L_3$

Exemple 9.14*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 76 & -21 & 98 & -5 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -6 & 98 \\ 0 & 0 & 32 & 53 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 32 \cdot 0 \cdot 21 = 0$$

Exemple 9.16 | On va calculer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A

Méthode 1 | On calcule une FE de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

↓ det
det(A)

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 4L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{12}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{12}L_3} = (-2) \cdot (-12) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3} = (-2) \cdot (-12) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 12 \cdot 3 = 72 \checkmark$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Méthode 2 Réduire un peu la matrice et utiliser le Thm 9.6

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

on développe
selon la 2^{ème}
ligne

$$= (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} = (-3) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} = (-3) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{on développe selon la 1^{ère} ligne}} = (-3) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 18 \cdot (6 \cdot 2 - 1 \cdot 8) = 18 \cdot 4 = 72 \quad \checkmark$$

Curiosité pour $n=3$ (règle de Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \overset{\text{I}}{a_{11} a_{22} a_{33}} + \overset{\text{II}}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \overset{\text{III}}{a_{13} a_{21} a_{32}} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{213} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21}$$

§ 9.4. L'identité $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Thm 9.18 | Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(Preuve) On montre d'abord que

$$(*) \quad \det(E \cdot C) = \det(E) \cdot \det(C), \quad \forall E, C \in M_n(\mathbb{R})$$

avec E élémentaire. En effet,

(OEL.I) $C \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} C' = E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot C$ et

$$\det(C') = -\det(C) \quad \& \quad \underbrace{\det(E(L_i \leftrightarrow L_j)) \cdot \det(C)}_{= -1 \cdot \det(I_n) = -1} \quad \boxed{30}$$

$\uparrow$
 $(MUL) + (ALT)$

$\uparrow$
 $(ALT) \nabla$

coincident ✓

$$(OEL.II) \quad C \xrightarrow{L_i \leftarrow 2L_i} C' = E(L_i \leftarrow 2L_i) \cdot C \quad \text{et}$$

$$\det(C') = 2 \cdot \det(C) \quad \& \quad \underbrace{\det(E(L_i \leftarrow 2L_i)) \cdot \det(C)}_{= 2 \cdot \det(I_n) = 2}$$

$\uparrow$
 (MUL)

$\uparrow$
 (MUL)

coincident ✓

$$(OEL.III) \quad C \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + 2L_j} C' = E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j) \cdot C \quad \text{et}$$

$$\det(C') = \det(C) \quad \& \quad \underbrace{\det(E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j)) \cdot \det(C)}_{= \det(I_n) = 1}$$

$\uparrow$
 $(MUL) + (ALT)$

$\uparrow$
 $(MUL) + (ALT)$

coincident ✓

Cela montre (*) ▽

Or, pour le cas général, on écrit

$$A = \underbrace{E^{(p)} \dots E^{(1)}}_{\text{matrices élémentaires}} \cdot \underbrace{\tilde{A}}_{\substack{\text{FER de} \\ A}}$$

on sait que A inversible
ssi $\tilde{A} = I_n$

En particulier, on conclut que

$$\det(A) = \det(E^{(p)} \dots E^{(1)} \cdot \tilde{A}) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\det(E^{(p)})}_{\neq 0 \nabla} \dots \underbrace{\det(E^{(1)})}_{\neq 0 \nabla} \det(\tilde{A})$$

Comme A est inversible ssi $\tilde{A} = I_n$, on voit que si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$, et de façon réciproque, si A n'est pas inversible, alors la matrice triangulaire supérieure $\tilde{A}$ possède au moins un zéro sur la diagonale, ce qui implique que $\det(\tilde{A}) = 0$, et, en conséquence $\det(A) = 0$. On a démontré que

(A) A inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

On finit la preuve du thm.

• Si A est inversible, alors $\tilde{A} = I_n$, ce qui nous dit que

$$\det(A \cdot B) = \det(\underbrace{E^{(p)} \dots E^{(1)} I_n}_{= B})$$

$$\stackrel{(*)}{=} \det(E^{(p)}) \dots \det(E^{(1)}) \cdot \det(B)$$

$$= \det(\underbrace{E^{(p)} \dots E^{(1)}}_A) \cdot \det(B)$$

$$[\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n] = \det(A) \cdot \det(B)$$

• Si A n'est pas inversible, alors AB n'est pas inversible
(vu que $\text{Vect}\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n\} \subseteq \text{Vect}\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n\} \neq \mathbb{R}^n \nabla$), ce qui nous dit
que, par (Δ) :

$$\det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A) \det(B). \quad \square$$

Thm 9.19 A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.
(c'est $(\Delta) \nabla$)

Quelques applications

- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible
- $\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(A)$, $\forall P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible

(On dit que A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe
une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P A P^{-1}$.)

(Preuve) • $I_n = A \cdot A^{-1}$ implique $1 = \det(I_n) = \det(A A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$
ce qui implique $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

$$\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \det(P)^{-1} = \det(A). \quad \square$$